

文章编号: 1000-8055(2007)08-1335-05

成败型与指数型单元混合系统的可靠性熵法评定

孙有朝

(南京航空航天大学 民航学院, 南京 210016)

摘 要: 利用信息量等效的基本原则, 研究了成败型单元与指数型单元混合组成系统的可靠性评定问题, 给出了成败型单元与指数型单元混合组成成败型系统或指数型系统时, 单元试验信息熵法折合的基本模型, 导出了成败型信息与指数型信息相互折合的基本公式, 并通过算例及其评定结果的分析比较说明了方法的具体应用及其有效性。

关 键 词: 航空、航天推进系统; 可靠性评定; 信息熵法; 成败型单元; 指数型单元; 信息折合
中图分类号: TB114. 3; O213. 2; G201 **文献标识码:** A

Entropy method of reliability assessment for system consisting of binomial units and exponential units

SUN Your chao

(College of Civil Aviation, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: According to the information equivalence principle, the reliability assessment method was studied for the system comprising binomial units and exponential units. The basic conversion models of entropy method were established for the binomial system or the exponential system based on individual test information. Meanwhile, the conversion formulas were presented for the binomial information and exponential information, and the availability of the method was illustrated comparatively through analysis of the examples and assessment results.

Key words: aerospace propulsion system; reliability assessment; information entropy method; binomial unit; exponential unit; data conversion

系统可靠性评定是可靠性工程的重要研究领域之一, 由单元信息确定系统可靠性的过程也称作可靠性综合。可靠性综合研究的主要内容就在于如何解决组成系统各单元的可靠性信息的等效与折合问题。这—问题是可靠性工程理论研究领域中最关键、也是最复杂的问题, 它的研究对评定和控制系统或产品的可靠性具有十分重要的工程实际意义。常见的可靠性评定方法很多, 都是基于

统计理论和矩法技术的, 如经典法、Bayes 法和信赖法等, 但各有其优缺点及其适用范围^[1]。本文根据信息熵等效的基本原则, 研究单元可靠性信息的等效折合问题, 将单元的可靠性信息折合成系统的等效信息, 并据以实现系统的可靠性评定。在工程实际中, 组成系统(特别是复杂系统)的单元的分布类型通常不同, 可能有成败型单元、也可能有指数型单元或其它分布类型单元, 本文主要研

收稿日期: 2006-07-31; 修订日期: 2007-03-20

基金项目: 航空科学基金资助项目(98J52082)

作者简介: 孙有朝(1965), 男, 河南南召人, 教授, 副院长, 博士, 主要从事系统可靠性与安全性工程, 飞机虚拟设计与验证技术等方向研究。

究常用的成败型与指数型单元混合组成的系统的可靠性评定问题.

1 单元试验信息的熵法折合模型

设系统由相互独立的 k 个成败型单元和 m 个指数型单元组成, 各单元的试验信息为

$$\begin{aligned} (f_i, n_i), s_i, p_i, q_i \quad i = 1, 2, \dots, k \\ (z_j, \eta_j), R_j, F_j, \tau_j \quad j = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

其中 $n_i = s_i + f_i$ 为第 i 个成败型单元的实际试验次数, f_i 为第 i 个成败型单元 n_i 次试验中失败次数的观测值, s_i 为第 i 个成败型单元 n_i 次试验中成功次数的观测值, p_i 为第 i 个成败型单元在其每次试验中出现成功消息的概率, q_i 为其出现失败消息的概率, z_j 为第 j 个指数型单元的实际失效次数, η_j 为第 j 个指数型单元的等效任务数, R_j, F_j 分别为第 j 个指数型单元在每个等效任务数内的可靠度和不可靠度, τ_j 为总试验时间. 由文献[1-3], 组成系统的所有单元的全部实际试验所提供的总信息量为

$$\begin{aligned} I_{be} = \sum_{i=1}^k I_{bi} + \sum_{j=1}^m I_{ej} = \\ - \sum_{i=1}^k n_i (p_i \ln p_i + q_i \ln q_i) - \\ \sum_{j=1}^m \eta_j (R_j \ln R_j + F_j \ln F_j) \end{aligned} \tag{1}$$

式中, I_{bi} 为第 i 个成败型单元在 n_i 次实际试验中所提供的信息量, I_{ej} 为第 j 个指数型单元在总试验时间 τ_j 内所提供的信息量.

1.1 折合为成败型系统的二项等效试验信息

由式(1)并利用成败型系统在 n 次折合试验中应提供的总信息量的基本公式^[3], 根据信息量等效原则, 可导出系统熵法折合的等效试验次数为

$$\begin{aligned} n = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (p_i \ln p_i + q_i \ln q_i) +}{P \ln P +} \rightarrow \\ \leftarrow \frac{\sum_{j=1}^m \eta_j (R_j \ln R_j + F_j \ln F_j)}{(1 - P) \ln(1 - P)} \end{aligned} \tag{2}$$

式中, n 为系统熵法折合的等效试验次数, P 为系统在其每次折合试验中出现成功消息的概率. 将 p_i, q_i, R_j 和 F_j 用其极大似然估计 (MLE) 表示^[4], 可得成败型与指数型单元混合组成成败型系统时单元试验信息熵法折合的基本公式为

$$\begin{cases} n = \frac{\sum_{i=1}^k (s_i \ln s_i + f_i \ln f_i - n_i \ln n_i)}{P \ln P + (1 - P) \ln(1 - P)} + \\ \frac{\sum_{j=1}^m \eta_j \left\{ -\frac{z_j}{\eta_j} \exp\left[-\frac{z_j}{\eta_j}\right] + \right. \rightarrow \\ \left. \left[1 - \exp\left[-\frac{z_j}{\eta_j}\right] \right] \ln \left[1 - \exp\left[-\frac{z_j}{\eta_j}\right] \right] \right\}}{P \ln P + (1 - P) \ln(1 - P)} \\ f = n(1 - P) \\ s = n - f = nP \end{cases} \tag{3}$$

式中, f 为系统熵法折合的等效失败次数, s 为系统熵法折合的等效成功次数. 由此式的折合结果, 即可求出该类系统可靠性的熵法第一近似限^[3].

1.2 折合为指数型系统的等效试验信息

根据信息量等效的原则, 由式(1)并利用指数型系统在折合的总试验时间 τ 内应提供的总信息量的基本公式^[3], 可求得系统的熵法折合等效任务数为

$$\begin{aligned} \eta = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (p_i \ln p_i + q_i \ln q_i) +}{R_0 \ln R_0 +} \rightarrow \\ \leftarrow \frac{\sum_{j=1}^m \eta_j (R_j \ln R_j + F_j \ln F_j)}{F_0 \ln F_0} \end{aligned} \tag{4}$$

式中, η 为熵法折合等效任务数, R_0, F_0 分别为系统在其每个折合的等效任务数内的可靠度和不可靠度. 将 p_i, q_i, R_j 和 F_j 的取其 MLE, 考虑到 R_0 即为系统完成一次任务的成功概率 P , 经推导可得成败型与指数型单元混合组成指数型系统时单元试验信息熵法折合的基本公式为

$$\begin{cases} \eta = \frac{\sum_{i=1}^k (s_i \ln s_i + f_i \ln f_i - n_i \ln n_i)}{P \ln P + (1 - P) \ln(1 - P)} + \\ \frac{\sum_{j=1}^m \eta_j \left\{ -\frac{z_j}{\eta_j} \exp\left[-\frac{z_j}{\eta_j}\right] + \right. \rightarrow \\ \left. \left[1 - \exp\left[-\frac{z_j}{\eta_j}\right] \right] \ln \left[1 - \exp\left[-\frac{z_j}{\eta_j}\right] \right] \right\}}{P \ln P + (1 - P) \ln(1 - P)} = n \\ z = -\eta \ln P \end{cases} \tag{5}$$

式中, z 为系统熵法折合等效试验的失效次数, η 为系统熵法折合的等效任务数. 由此式的折合结果, 即可求出该类系统可靠性的熵法第二近似

限^[3].

上述研究了组成系统的单元互不相同的情况, 而对于系统中有些组成单元相同时的情况, 其处理方法与此类似, 所不同的仅是对这些相同单元中的一个进行试验且提供信息量, 而其余与其相同的单元并没有提供任何信息量, 此时在计算单元试验提供信息量时, 相同单元部分按一个处理即可^[4].

公式(3)、(5)可用于任何具有确定可靠性结构模型的系统, 式中 P 可根据系统的实际可靠性结构模型具体确定, 通常取其 MLE.

2 成败型信息与指数型信息的相互折合

工程实际中, 在进行可靠性评定时, 有时需要进行不同分布类型信息之间的相互折合. 如可将指数型信息折合为成败型信息, 也可将成败型信息折合为指数型信息. 然后再根据折合后的数据信息进行可靠性综合. 这里给出基于信息量等效的成败型信息与指数型信息相互折合的基本公式.

2.1 指数型信息折合为成败型信息

设某单元(或系统)的指数型信息为 (z_i, η_i) , R_i, F_i, τ_i , 则该单元提供的信息量为

$$I_{ei} = -\eta_i(R_i \ln R_i + F_i \ln F_i) \quad (6)$$

设折合的等效成败型信息为 $(f_i, n_i), p_i, q_i$, 则折合后该单元应提供的信息量为

$$I_{ui} = -n_i(p_i \ln p_i + q_i \ln q_i) \quad (7)$$

根据信息量相等的原理, 有

$$I_{ei} = I_{ui} \quad (8)$$

考虑到对同一个单元(或系统)有 $R_i = p_i$, $F_i = q_i$, 由此可知

$$n_i = \eta_i \quad (9)$$

又

$$f_i = n_i(1 - \hat{p}_i) = \eta_i(1 - R_i) = \eta_i \left[1 - \exp \left(-\frac{z_i}{\eta_i} \right) \right] \quad (10)$$

由此可得指数型信息折合为成败型信息的基本公式为

$$\begin{cases} n_i = \eta_i \\ f_i = -\eta_i \left[1 - \exp \left(-\frac{z_i}{\eta_i} \right) \right] \end{cases} \quad (11)$$

2.2 成败型信息折合为指数型信息

设某单元(或系统)的成败型信息为 (f_i, n_i) ,

s_i, p_i, q_i , 该单元折合的指数型信息为 $(z_i, \eta_i), R_i, F_i, \tau_i$, 与上述方法类似可求得 $\eta_i = n_i$. 而

$$z_i = -\eta_i \ln R_i = -n_i \ln \hat{p}_i = -n_i \ln \frac{s_i}{n_i} \quad (12)$$

由此可得成败型信息折合为指数型信息的基本公式为

$$\begin{cases} \eta_i = n_i \\ z_i = -n_i \ln \frac{s_i}{n_i} \end{cases} \quad (13)$$

由式(11)、(13)可知, 只有当 $z_i = 0$ 或 $f_i = 0$ 时有 $f_i = z_i$, 否则 $f_i \neq z_i$.

3 应用算例

在工程实际中, 研究系统的可靠性综合评定问题, 人们通常关心的是系统可靠性的下限. 为了研究方便, 假设系统自身的实际试验次数为 0 (即系统没有进行实际试验), 此时系统的综合信息即为系统的熵法折合信息. 若系统自身有实际试验数据, 将该实际试验数据与系统折合的等效试验数据相加即可得出系统的综合数据(信息), 此时应用此综合数据作为系统评定的基础.

3.1 系统可靠性综合评定

算例 1 二项单元与指数单元的串联系统, $k=2, (f_1, n_1) = (1, 41), (f_2, n_2) = (1, 51); m=2, (z_1, \eta_1) = (2, 100), (z_2, \eta_2) = (1, 80)$, 求 $\gamma=0.9$ 时系统可靠性的熵法近似下限.

解 对二项单元与指数单元混合组成的串联系统, 基本公式(3)及(5)中 P 取其 MLE $\hat{P}$ 为

$$\begin{aligned} P = \hat{P} &= \prod_{i=1}^k \hat{p}_i \prod_{j=1}^m R_j = \prod_{i=1}^k \frac{s_i}{n_i} \prod_{j=1}^m \cdot \\ \exp \left(-\frac{z_j}{\eta_j} \right) &= \prod_{i=1}^k \frac{s_i}{n_i} \exp \left(-\sum_{j=1}^m \frac{z_j}{\eta_j} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

将已知数据代入上式及式(3)、(5), 经计算可得

$$\begin{aligned} P = \hat{P} &= 0.925\,894\,261, n = \eta = 93.507\,248\,5, \\ f &= 6.929\,423\,752, z = 7.199\,613\,025 \end{aligned}$$

由可靠性综合评定的基本模型^[1], 并利用有关统计数表(GB4087.3-85), 即可求出系统可靠性的熵法近似下限. 设 $\tilde{R}_{L,s-c}, \bar{R}_{L,s-c}$ 分别为系统可靠性熵法经典第一、二近似下限, $\tilde{R}_{L,s-B}, \bar{R}_{L,s-B}$ 分别为系统可靠性熵法 Bayes 第一、二近似下限. 则根据插值计算可得^[4]

$$\tilde{R}_{L,s-c} = 0.878\,3, \tilde{R}_{L,s-B} = 0.890\,0$$

查 χ^2 分布分位数表并经插值可得

$$\chi^2_{2+2,\gamma} = 24.031\,764\,2, \chi^2_{2,\gamma} = 21.560\,373\,99$$

由此可得

$$\bar{R}_{L,s-C} = \exp[-\chi^2_{2z+2, \sqrt{(2\eta)}}] = 0.879\,4,$$
$$\bar{R}_{L,s-B} = \exp[-\chi^2_{2z, \sqrt{(2\eta)}}] = 0.891\,1$$

为了便于与传统矩法技术所得的结果进行比较、验证,引入文献[1]中经典第一、二近似下限、Bayes 第一、二近似下限的计算结果,依次分别记为 $\tilde{R}_{L,C}$ 、 $\bar{R}_{L,C}$ 、 $\tilde{R}_{L,B}$ 和 $\bar{R}_{L,B}$.本例结果与传统评定方法的结果比较见表1(由小到大排列).

表 1 算例 1 的评定结果比较表

Table 1 Comparison of various assessment results in Example 1

$\tilde{R}_{L,C}$	$\bar{R}_{L,C}$	$\tilde{R}_{L,s-C}$	$\bar{R}_{L,s-C}$
0.861 4	0.861 4	0.878 3	0.879 4
$\tilde{R}_{L,B}$	$\bar{R}_{L,B}$	$\tilde{R}_{L,s-B}$	$\bar{R}_{L,s-B}$
0.880 6	0.880 6	0.890 0	0.891 1

算例 2 二项单元与指数单元的并联系统, $k=1, (f^1, n^1) = (1, 10); m=1, (z^1, \eta) = (2, 15)$,求 $y=0.9$ 时系统可靠性的熵法近似下限.

解 对二项单元与指数单元混合组成的并联系统,式(3)及(5)中 P 取其MLE $\hat{P}$ 为

$$P = \hat{P} = 1 - \prod_{i=1}^k (1 - \hat{p}_i) \prod_{j=1}^m (1 - \hat{R}_j) =$$
$$1 - \prod_{i=1}^k \frac{f_i}{n_i} \prod_{j=1}^m \left[1 - \exp\left(-\frac{z_j}{\eta_j}\right) \right] \quad (15)$$

将已知数据代入上式及式(3)、(5),经计算可得

$$P = \hat{P} = 0.987\,517\,331, n = \eta = 132.556\,176\,2$$
$$f = 1.654\,654\,871, z = 1.665\,068\,88$$

由算例 1 类似方法,经计算可得

$$\tilde{R}_{L,s-C} = 0.964\,0, \tilde{R}_{L,s-B} = 0.974\,9$$
$$\bar{R}_{L,s-C} = 0.964\,1, \bar{R}_{L,s-B} = 0.974\,8$$

本例结果与传统评定方法的结果比较见表

2.

表 2 算例 2 的评定结果比较表

Table 2 Comparison of various assessment results in Example 2

$\tilde{R}_{L,s-C}$	$\bar{R}_{L,s-C}$	$\tilde{R}_{L,B}$	$\bar{R}_{L,B}$	$\tilde{R}_{L,s-B}$	$\bar{R}_{L,s-B}$
0.964 0	0.964 1	0.965 9	0.969 1	0.974 8	0.974 9

3.2 数据信息的折合

算例 3 已知某单元试验信息为 $(z, \eta) = (4, 150)$,将其折合为成败型数据,比较指数型和成败型可靠性熵法近似下限之结果.置信度 $y=0.9$.

解 由式(11)可得折合的成败型数据为

$$n = 150, f = 3.947\,137\,597$$

(1) 按指数型数据 $(z, \eta) = (4, 150)$ 评估查 χ^2 分布分位数表有

$$\chi^2_{2z+2, y} = \chi^2_{40, 0.9} = 15.987\,18,$$
$$\chi^2_{2z, y} = \chi^2_{8, 0.9} = 13.361\,57$$

由此可得

$$\bar{R}_{L,s-C} = \exp[-\chi^2_{2z+2, \sqrt{(2\eta)}}] =$$
$$0.948\,104\,458,$$

$$\bar{R}_{L,s-B} = \exp[-\chi^2_{2z, \sqrt{(2\eta)}}] = 0.956\,438\,712$$

(2) 按折合后的成败型数据 $(f, n) = (3.947\,137\,597, 150)$ 评估

表 3 $\tilde{R}_{L,s-C}$ 的插值计算

Table 3 Inserting value calculation of $\tilde{R}_{L,s-C}$

f	3	3.947 137 597	4	
n	150	0.956 0	0.947 854 616	0.947 4

表 4 $\tilde{R}_{L,s-B}$ 的插值计算

Table 4 Inserting value calculation of $\tilde{R}_{L,s-B}$

f	3	3.947 137 597	4	
n	150	0.9647	0.956 175 761	0.955 7

由表 3、4 可知

$$\tilde{R}_{L,s-C} = 0.947\,854\,616, \tilde{R}_{L,s-B} = 0.956\,175\,761$$

按原指数型试验数据与按折合后的等效成败型数据对该单元进行可靠性评定的结果之间的相对误差为

$$\frac{|\bar{R}_{L,s-C} - \tilde{R}_{L,s-C}|}{\bar{R}_{L,s-C}} = 0.026\,35\%,$$
$$\frac{|\bar{R}_{L,s-B} - \tilde{R}_{L,s-B}|}{\bar{R}_{L,s-B}} = 0.027\,49\%$$

4 结束语

大量算例可以看出(为节省篇幅这里仅给出两例:例 1, 例 2),熵法经典近似下限通常介于传统经典置信下限和 Bayes 置信下限之间.熵法 Bayes 近似下限有时会稍大于 Bayes 置信下限,这里采用的是基于 Reformulation 方法的评定结果,如果采用其它方法(假设),如 Box-Tiao 方法或 Bayes 假设^[1],其评定结果也通常介于传统经典置信下限和 Bayes 置信下限之间.由此可知,熵法评定结果是令人满意的.由例 3,不同分布类型数据信息折合前后其评定结果非常接近,说明了不同分布类型数据信息熵法等效折合的正确性和有效性.系统可靠性熵法综合评定属系统可靠性

综合评定的范畴, 本文主要针对常用的成败型与指数型单元混合组成的系统的可靠性熵法评定进行了研究, 其研究思路与方法可适用于任何具有特定可靠性结构模型的系统的可靠性综合评定问题.

参考文献:

[1] 周源泉, 翁朝曦. 可靠性评定[M]. 北京: 科学出版社, 1990.
[2] 王崇彦, 陆锦辉. 信息论基础[M]. 北京: 兵器工业出版

社, 1992.
[3] 施军. 系统可靠性评定的熵(法)近似限[J]. 航空学报, 1996, 17(5): 543-548.
SHI Jun. Entropy (Method) Approximate Limits of System Reliability Assessment[J]. Acta Aeronautica Et Astronautica Sinica, 1996, 17(5): 543-548.
[4] SUN Youchao, SHI Jun. Reliability assessment of entropy method for system consisted of identical exponential units[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2004, 17(4): 502-506.

